Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario

Anno accademico: 2003/2004

Indirizzo matematico scientifico

Progetto didattico :

Le misure in fisica e l'analisi dell'errore

Professoresse : Pilo M.
Tuccio M.T.

GANDOLFO LUDOVICA (classi di abilitazione : 47/48/59)

Premessa:

Si tratta di un progetto didattico proponibile a partire da una **classe seconda** delle medie inferiori in cui siano già state introdotte le nozioni di :

- Proporzione /rapporto
- Equivalenza

che rappresentano i nodi concettuali portanti del concetto di misura.

Misura e strumenti di misura

"ogni qualvolta vi è possibile ***misurare*** *ed esprimere per mezzo di* ***numeri*** *l'argomento di cui state parlando, voi conoscete effettivamente qualcosa... " (Thomson, fisico inglese 1824- 1907).*

Questa frase mette in luce un aspetto fondamentale del metodo scientifico: per ***conoscere scientificamente*** qualsiasi fenomeno è necessario essere in grado di esprimere i propri risultati attraverso dei numeri. Utilizzare dei numeri significa utilizzare un linguaggio matematico che oltre ad eliminare le ambiguità che sono naturalmente insite in qualsiasi spiegazione di tipo discorsivo, risulta essere universale.
Quindi se il problema della conoscenza è spostato sulla espressione di valori numerici, nodo fondamentale sarà lo studio delle modalità attraverso cui essi si esprimono, cioè le misurazioni.

conoscenza ⟷ numero ⟷ misura

ha dunque senso chiedersi:

cosa significa misurare in fisica?

Per misurare una grandezza fisica occorre uno strumento di misura che verrà scelto in base a quello che si vuole determinare. Misurare significa essenzialmente confrontare.

Il confronto avviene tra una grandezza di riferimento e quella che si vuole misurare. Il rapporto esistente tra le due, che ovviamente devono essere omogenee, è la misura della grandezza che sarà espressa nell'unita di misura prescelta, argomento su cui torneremo in seguito. Caratteristiche essenziali di uno strumento di misura , sono:

- **PORTATA**
- **SENSIBILITA'**

La **PORTATA** (fondo scala)indica il massimo valore della grandezza che lo strumento può misurare. Per esempio non si può utilizzare una bilancia per alimenti di casa per misurare la quantità di cemento che occorre per costruire un muro.

La **SENSIBILITA'** indica la più piccola variazione di grandezza apprezzabile con quello strumento,cioè la distanza fra due tacche successive o la metà di questa distanza se le tacche sono ben leggibili.

Vi è una relazione tra le due caratteristiche che risulta evidente se si considera il seguente esempio.

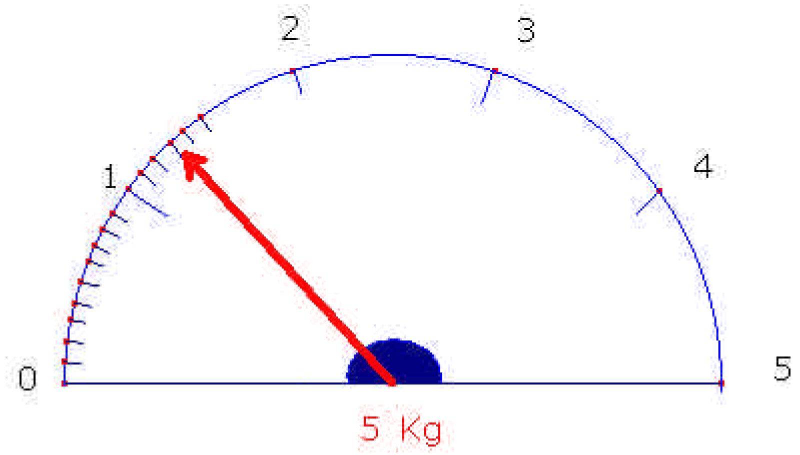
Lo strumento di misura che si utilizza per pesare è la bilancia; si chiama analogica quella bilancia in cui la lettura della misura è determinata dalla posizione di una lancetta mobile su una scala, altrimenti si dice digitale in cui la lettura avviene tramite un display. A seconda delle quantità che si intendono misurare si utilizzano diversi tipi di bilance. L'orefice, per esempio, ha un bilancino che è diverso dalla bilancia che usa il panettiere che è ancora diversa da quella che molti di noi hanno in casa come pesa-persone. Per ciascuna di esse cambia la portata e anche la minima quantità apprezzabile. Nella tabella seguente sono riportati alcuni esempi.

	Bilancia dell'orefice	**Bilancia del panettiere**	**Bilancia pesa-persone**
portata	1 Kg	5 Kg	130Kg
sensibilità	5mg	2 g	1 Kg

Supponiamo di dover leggere la misurazione fatta utilizzando una bilancia analogica rappresentata in figura 1 la cui portata è pari a 5 Kg. Innanzitutto determiniamone la sensibilità: basterà valutare la distanza tra due tacche successive che risulta essere 0,1Kg. Osservando il valore indicato dalla lancetta, si può affermare che la misura risulta compresa tra 1,3 Kg e 1,4 Kg, che possiamo scrivere: 1,3 Kg < misura(grandezza) <1,4 Kg o volendo possiamo apprezzare a occhio la mezza tacca e scrivere: 1,3 Kg < x <1,35 Kg

Già questo semplice esempio evidenzia un problema fondamentale legato alla misurazione: l'incertezza che accompagna la misura.

FIGURA 1



Questo semplice esempio ci fa comprendere che la precisione di una misura è legata alla sensibilità dello strumento prescelto.

Si dice che uno strumento è a bassa sensibilità quando restituisce lo stesso risultato ogni qualvolta si ripeta la misurazione della stessa grandezza (per esempio: il metro da sarta o la bilancia della fig.1)

PRIMA CONSIDERAZIONE DIDATTICA

La scelta dello strumento di misura in base alla portata e alla sensibilità fa emergere due delle caratteristiche principali del metodo di procedere scientifico:

1. la progettazione a priori dell'esperimento, con uno studio accurato del fenomeno
2. la ricerca del massimo risparmio e convenienza in termini di lavoro

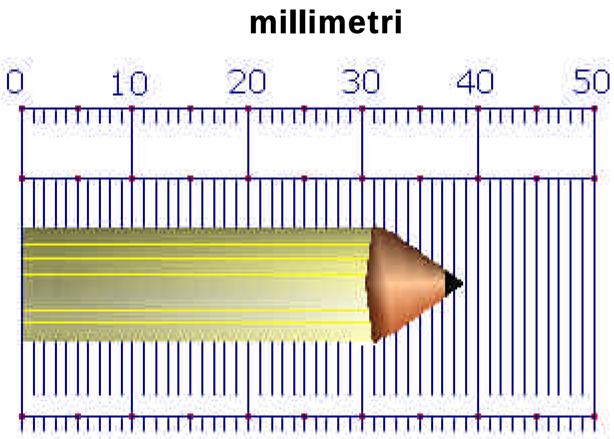
Rifacendoci all'esempio precedente dell'utilizzo della bilancia , appare chiaro che utilizzare una bilancia con un fondo scala di 1 Kg (quella dell'oreficeria) per misurare una cassetta d’arance, non solo non avrebbe senso, ma rovinerebbe lo strumento. Infatti utilizzare un fondo scala di 1 Kg , significa utilizzare uno strumento che al massimo è in grado di apprezzare 1 Kg notevolmente inferiore alla misura della grandezza da misurare. L’effetto visibile sarebbe solo lo spostamento repentino della lancetta sul valore 1 Kg con il solo risultato di danneggiare lo strumento. Occorre quindi progettare a priori la misurazione avendo idea dell’ordine di grandezza del fenomeno che si intende misurare.

Esperienza in classe

Introducendo il concetto di misura abbiamo considerato lo strumento di misura e le sue caratteristiche, attraverso alcuni esempi molto pratici (le bilance dell’orefice, del panettiere, ecc) e al tempo stesso didatticamente molto efficaci. Questo fatto suggerisce la possibilità di proporre delle esperienze dirette in classe, quali la misurazione della lunghezza di semplici oggetti utilizzando il metro a nastro o semplicemente un righello, oppure, introdurre i concetti di portata e sensibilità utilizzando una bilancia analogica.
L’approccio sperimentale, infatti, evidenzia le difficoltà che sono presenti in qualsiasi operazione di misura, facendo emergere il concetto dell’incertezza inevitabile che è insita nella misura stessa. Determinando la lunghezza di una matita,(vedi **esperienza 1)**, risulterà chiaro che non è esattamente 39 mm, mentre si potrà immaginare che è compresa nell’intervallo tra 38 mm e 39,5 mm. Analogamente per la lettura della misurazione nell’**esperienza 2**, i ragazzi potranno fare delle inferenze, facendo delle stime del tipo: *la misura è maggiore di 13 Kg, ma non arriva a 14 Kg. In un secondo tempo ci si accorgerà che forse si può affermare essere minore di 13,5 Kg*. In tal modo, per passi successivi, ci si accorge come, la determinazione del valore a cui si giunge misurando, non possa essere il “*valore vero”* della grandezza, ma un valore accompagnato da un’incertezza su cui ci soffermeremo più avanti.

Esperienza 1 ***(in classe)***

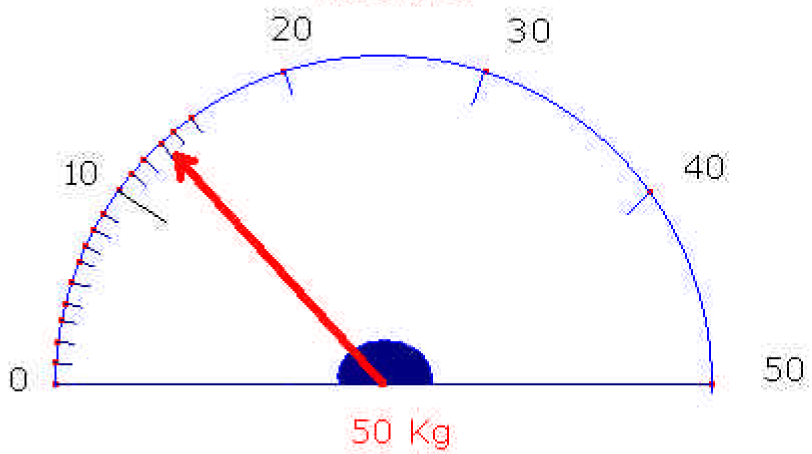
Determinare la portata dello strumento di misura sotto disegnato, la sensibilità e la lunghezza della matita.



Esperienza 2 ***(in laboratorio)***

Determinare la sensibilità della bilancia sotto disegnata e la misura indicata dalla lancetta, sapendo che la portata è di 50 Kg.

FIGURA 2



Grandezze fisiche

Le considerazioni fatte sino ad ora sulla necessità di ricondurre le informazioni relative ad un fenomeno fisico ad un numero, ottenuto in seguito ad una misurazione utilizzando uno strumento di misura opportuno, spostano l'attenzione su quelle che sono in definitiva gli oggetti della misurazione: le grandezze fisiche.

Per inquadrare un fenomeno fisico in un contesto temporale usiamo il tempo, per descriverne le dimensioni la lunghezza,in altre situazioni usiamo la forza, velocità, ecc.. questi sono tutti esempi di grandezze fisiche.

Pur trattandosi di termini a noi famigliari, in ambito scientifico per parlare di grandezza fisica è necessario fare alcune considerazioni:

In natura esiste un numero molto elevato di grandezze fisiche usando le leggi fisiche che legano tra loro le varie grandezze è possibile fare una prima netta distinzione in:

- **grandezze fondamentali**
- **grandezze derivate.**

Sono grandezze **fondamentali** quelle per la cui definizione non è necessario ricondursi ad altre grandezze (per questo vengono dette **indipendenti**) e per le quali si definisce un campione di unità di misura. Sono **derivate** quelle definite tramite le grandezze fondamentali in base alle relazioni fisiche che le legano a quest'ultime(per questo dette **dipendenti.**) e per le quali non si definisce un campione esse sono misurate attraverso le unità di misura delle grandezze fondamentali.

Un semplice esempio può chiarire quanto detto:

E' noto dalle leggi fisiche che nel moto uniforme $velocità = \frac{spazio}{tempo}$

Pertanto le grandezze che intervengono nella descrizione del moto di un corpo sono :

- la lunghezza
- il tempo
- la velocità

ma è sufficiente conoscere lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo per ricavare la velocità, in quanto la velocità come grandezza fisica la si definisce come il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Se assumiamo spazio e tempo come grandezze fondamentali la velocità sarà una grandezza derivata e l'unità di misura della velocità sarà il rapporto fra le due unità corrispondenti alla lunghezza e al tempo.

In fisica bastano sette unità per ricavare tutte le altre: spazio e tempo viste nell'esempio precedente sono le prime due.

Sistemi di unità di misura

Un sistema di unità di misura è completamente individuato ogni qual volta è esplicitata:

- la scelta delle grandezze fondamentali
- la scelta delle corrispondenti unità di misura, i campioni di misure , cioè le unità fondamentali con relativi nomi, simboli e definizioni

Sono stati formulati nel corso dei tempi diversi sistemi di unità di misura, in base all'evoluzione stessa del concetto di unità di misura e alle abitudini locali.

La comunità scientifica si è accordata sul sistema internazionale proposto per la prima volta nel 1935 dal fisico italiano Giorgi, che è stato successivamente perfezionato denominato Sistema Internazionale **SI** il quale assume come grandezze fondamentali:

- lunghezza
- intervallo di tempo
- massa
- temperatura assoluta
- intensità della corrente elettrica
- intensità luminosa
- quantità di sostanza materia

denominazioni e simboli delle unità fondamentali del sistema SI

Grandezze fondamentali	Unità di misura		
	nome	**simbolo**	**definizione**
Lunghezza	metro	**m**	Il metro è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di 1/299792458 di secondo
Tempo	secondo	**s**	Il secondo è definito in funzione al numero di vibrazioni della luce emessa da una sorgente atomica (il cesio133)
Massa	kilogrammo	**Kg**	Il Kilogrammo è l'unità di massa ;esso è pari alla massa del prototipo internazionale del Kilogrammo. di platino-iridio
Temperatura termodinamica	kelvin	**k**	il kelvin, l'unità di temperatura termodinamica assoluta temperatura a cui coesistono acqua e ghiaccio è pari a 273 ^{o}K; nella vita di tutti i giorni si usano 0 ^{o}C. Pertanto :20 ^{o}C =293 ^{o}K.
Intensità di corrente elettrica	ampère	**A**	… … … ..
Quantità di sostanza	mole	**mol**	
Intensità luminosa	candela	**cd**	

Il sistema internazionale è chiamato anche MKSA dalle iniziali delle unità fondamentali per le grandezze meccaniche con l'aggiunta della A , relativa all'intensità di corrente elettrica. Fra gli altri sistemi di misura, non va dimenticato il sistema di misura ***CGS*** in cui si assumono per quanto riguarda le grandezze meccaniche fondamentali come unità di misura il centimetro, i grammo-massa e il secondo come si vede seguente tabella.

sistema CGS

Grandezze fondamentali	Unità di misura	
	nome	simbolo
Lunghezza Massa Tempo	centimemetro grammo-massa secondo	**m** **g** **s**

Equivalenze: (che vedremo dopo)

1 cm = 0,01 m

1 g = 0,001 Kg

Da ricordare sono i ***sistemi anglosassoni,*** tuttora utilizzati in questi Paesi, basati su unità di misura differenti; ad esempio per la lunghezza si definisce la **iarda** (con i suoi multipli: **miglia** e sottomultipli: **piedi, pollici**) per cui vale l'equivalenza :

1 iarda = 0.9144 metri che equivale alla scrittura:

1 pollice = 2,54 cm.

Infine vi sono molti sistemi di misura che, pur non essendo canonici, per la loro praticità e l'uso consolidato, hanno assunto ruolo di sistemi di unità di misura ufficiosi. Ne sono un esempio unità di misura relative al petrolio il cui prezzo non è definito al litro, ma al barile o il carato per le pietre preziose, che può essere una misura di peso, oppure indicativo della finezza dell'oro.

I barile di petrolio = 159 litri

Possiamo osservare che **barili/giorno** diventa una unità di misura di produzione di un pozzo petrolifero: **1bbl/giorno = 50 t/anno** (circa)

Per quanto riguarda i carati si ha che **:**

1 carato = 0,2 grammi

A conferma di quanto detto dell'influenza delle abitudini locali sui sistemi di unità di misura vi è l'origine del nome carato. Esso deriva da carruba i cui semi hanno la particolare caratteristica di avere lo stesso peso. Nell'antichità venivano usati come unità di riferimento per la misurazione del peso dei diamanti: **1 seme = 1 carato.**

Infine esiste tutta la serie di unità di misura marinare che prevedono per esempio i nodi, derivanti da antichi metodi basati effettivamente sull'utilizzo di corde con un numero fissato di nodi aventi uno scopo specifico per determinate la velocità di un veliero[1].

1 nodo =1 miglio marino/h $\cong$ 0,5 m/s

Equivalenze

Definite le grandezze fondamentali e le loro unità di misura si può esprimere qualsiasi grandezza derivata esempio:

V= $\frac{spazio}{tempo}$

nel SI la velocità si esprimerà in m/s

nel CGS la velocità si esprimerà in cm/s

Molte volte risulta utile per esprimere la misura di grandezze molto grandi o molto piccole utilizzare dei prefissi alle unità di misura fondamentali (definite in un sistema di unità) che individuano dei fattori di conversione i quali assicurano l'equivalenza. Queste equivalenze rappresentano esercizi molto utili didatticamente perché esprimono due concetti che rappresentano il nodo concettuale portante della misurazione:

- **il concetto di rapporto**
- **il concetto di proporzione**

Premessa

Spiegando ai ragazzi la notazione seguente denominata notazione scientifica:

$1000 = 10^3$

$100 = 10^2$

$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

risulta utile rileggere le unità di misure imparate alle scuole elementari pensandole non come unità distinte da quelle fondamentali, ma solo come risultato di moltiplicazioni dell'unità fondamentale per multipli o sottomultipli di 10.

La **tabella dei prefissi SI** sotto riportata ci aiuta e va letta nel modo seguente:

per esempio: il prefisso milli, anteposto all'unità metro, cioè milli-metro (in simboli: mm), rappresenta l'unità di misura derivata ottenuta moltiplicando l'unità metro per il valore: 10^{-3}. Ricordando che 10^{-3} è un modo diverso di scrivere $\frac{1}{10^3}$ l'operazione fatta, equivale a dividere l'unità di misura fondamentale per 1000.

Analogamente, il decimetro ottenuto ponendo il prefisso deci all'unità di misura metro cioè deci-metro (in simboli: dm), rappresenta l'unità di misura ottenuta moltiplicando l'unità di misura metro per il valore : 10^{-1} cioè dividere l'unità metro per 10 .

prefissi per le unità SI

	Prefisso	Valore	Simbolo	Esempi
sottomultipli	deci	10^{-1}	**d**	dm(decimetro);dg(decigrammo)
	centi	10^{-2}	**c**	cm(centimetro);
	milli	10^{-3}	**m**	mm(millimetro);mA(milliampère)
	micro	10^{-6}	**ì**	ìm(micrometro)
	nano	10^{-9}	**n**	nm (nanometro)
	pico	10^{-12}	**p**	pH (picohenry)
multipli	deca	10	**D**	Dm (decametro)
	etto	10^{2}	**h**	hm(ettometro), hg(ettogrammo)
	chilo	10^{3}	**k**	km(chilometro), Kg(Kilogrammo)
	mega	10^{6}	**M**	MW(megawatt), MB(megabyte)
	giga	10^{9}	**G**	Gw(gigawatt), GHz(gigahertz)
	tera	10^{12}	**T**	THz(teraherz)

Per il passaggio fra sistemi di unità di misura diversi SI, CGS e anglosassone o marinaro le tabelle successive possono essere utili in questo caso.

Fattori di conversione tra sistema SI e Sistema Anglosassone per la grandezza fisica: lunghezza

	cm	**m**	**Km**	**pollice**	**piede**	**miglio**
1centimetro	1	10^{2}	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$6{,}214 \cdot 10^{-6}$
1 metro	100	1	10^{-3}	39,3	3,281	$6{,}214 \cdot 10^{-4}$
1 chilometro	10^{5}	1000	1	$3{,}937 \cdot 10^{-4}$	3281	0,6214
1 pollice	2,540	$2{,}540 \cdot 10^{-2}$	$2{,}540 \cdot 10^{-5}$	1	$8{,}333 \cdot 10^{-2}$	$1{,}578 \cdot 10^{-5}$
1 piede	30,48	0,3048	$3{,}048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \cdot 10^{-4}$
1 miglio	$1{,}609 \cdot 10^{5}$	1609	1,069	$6{,}336 \cdot 10^{4}$	5280	1

Alcuni esercizi proposti:

Esercizio 3: ***esprimere 3 centimetri in metri.***

3 cm = $3 \cdot 10^{-2}\, m = 3 \cdot \frac{1}{10^2}\, m = 3 \cdot \frac{1}{100}\, m = 0{,}03 m$

1 litro =1 dm³ (unità di misura di capacità e unità di misura di volume)

50 litri = 50 dm^3 = 50 · 10^{-3} m^3 = 0,05 m^3

Esercizio 4: ***100 metri (m) e 100 iarde (yd) sono entrambe lunghezze su cui si svolgono classiche gare di atletica.***
Quale delle due corse è più lunga sapendo che 1 iarda =0.9144 metri ?

100 yd = 100·0,9144 m = 91,44 m che è minore di100 m.

Esercizio 5: **trasformare la velocità 72 km/h in m/s**

$$\frac{72 \cdot 10^3}{3600} \cdot 10^{-3} = 20 \frac{m}{s}$$

Esercizio 6: ***trasformare la velocità 10 metri al secondo in chilometri all'ora.***

10 $\frac{m}{s}$, occorre convertire i metri in Km e i secondi (s) in h.

1m=$1 \cdot 10^{-3}\, Km = 1 \cdot \frac{1}{10^3}\, km = \frac{1}{1000}\, km = 0{,}001 Km$;

1 s = $\frac{1}{60}\,\text{min}$

1 min = $\frac{1}{60}\,h$ allora

1 s = $\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\,h = \frac{1}{3600}\,h$ da ciò segue che

$$\frac{10m}{s} = \frac{10\cdot(0{,}001Km)}{(\frac{1}{3600})h} = \frac{10\cdot(0{,}001Km)}{(\frac{h}{3600})} = \frac{10\cdot(0{,}001)Km\cdot 3600}{h} = \frac{(10\cdot 3600\cdot 0.001)Km}{h} = 36\,\frac{Km}{h}$$

<u>Esercizio 7</u>:

un sommegilbile di esplorazione si immerge alla velocità di 601 piedi al minuto. Esprimere tale velocità in metri al secondo.

(Analogo al precedente sfruttando la tabella di conversione tra SI e Sistema Anglosassone.)

<u>Analisi dell’errore</u>

Abbiamo considerato sino ad ora :

- gli strumenti di misura e le loro caratteristiche
- le grandezze fisiche
- sistemi di unità di misura e conversioni tra le unita di misura che essi introducono

Ci occupiamo adesso di un importante aspetto legato alla misurazione: l’errore di misura. Per quanto una misurazione sia fatta con cura, nessuna misurazione può essere esente da errore.

Va sottolineato, che il significato del termine errore, assume una valenza diversa in ambito scientifico, come è chiaramente espresso da J. R. TAYLOR nel libro ***“Introduzione all’analisi degli errori*”**:

<< Nella scienza la parola <u>errore</u> non implica il solito significato di <u>sbaglio</u> o svista. ”Errore” in una misura scientifica significa l’inevitabile incertezza che è presente in tutte le misure>>.

Dire che ogni misura è affetta da errore, significa affermare che il risultato della misurazione non esprime esattamente il valore reale della grandezza chiamato ***valor-***

vero. Attraverso la misura, riprendendo l'esempio della bilancia a pag.6, si determina un intervallo entro cui possiamo immaginare sia compreso il ***valore-vero***. L' Analisi dell'errore è lo studio e il calcolo dell'incertezza che accompagna la misura e ha come obiettivo minimizzarla.

Pur essendovi molti fattori che influiscono sulle cause dell'errore in una misura, si possono classificare due categorie:

1. **errori sistematici**
2. **errori accidentali**

I primi sono quelli attribuibili ad un errato metodo di misurazione, utilizzo di strumenti mal tarati, o modificati da fattori esterni (**es 1**: metro appoggiato su un calorifero, subisce una dilatazione quindi a maggior ragione qualsiasi misurazione che lo utilizzi sarà affetta da errore; **es. 2:** fotocopiando, il disegno di un righello, utilizzando un ingrandimento vedi pag. 5, la misura dell'oggetto risulterà necessariamente falsata in questo caso inferiore a quella corretta). Questi errori si ripetono sempre nella stessa direzione (se si utilizza il metro dilatato,dell'esempio precedente, le misure effettuate saranno sempre affette da errore per difetto). Analizzando con attenzione la dinamica della misurazione in relazione alla sistematicità del risultato, l'errore può essere individuato, quindi eliminato.

Un classico errore che rientra in questa categoria è l'errore di parallasse. E' un errore legato alla lettura dell'indicatore di uno strumento di misura in relazione alla posizione di chi legge. Si capisce immediatamente se si pensa ad un orologio a muro.La posizione corretta per la lettura, vuole che lo sguardo sia perpendicolare all'orologio perché qualunque posizione a sinistra o a destra del quadrante causa un errore per difetto o per eccesso.

Gli errori accidentali sono invece causati dalle possibili combinazioni di fattori casuali, per questo non vi è la sistematicità dell'errore come nel caso precedente, bensì risultano ogni volta differenti. La casualità dell'errore ne impedisce l'eliminazione.Ne sono un esempio le rilevazioni di tempi attraverso un cronometro: in tal caso la misurazione dipende per esempio dalla nostra capacità di riproporre le stesse condizioni per ogni misurazione: dal tempo di reazione dei nostri sensi nell'attivare il cronometro e nel fermarlo e questo è molto difficile.

Un modo corretto per fornire una misura in relazione alla lettura di uno strumento è quello di individuare due dati:

- un valore numerico: *la miglior stima* del valor vero della grandezza

- un intervallo in cui siamo "sicuri" si trovi la misura

misura (grandezza) = $X_{miglior\text{-}stima} \pm \Delta x$ Questa scrittura significa che il valor vero della grandezza appartiene all'intervallo $x - \Delta x \quad \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv \quad x + \Delta x$ cioè :

$$x_{misurato} - \Delta x \leq x_{vero} \leq x_{misurato} + \Delta x$$

L'errore di misura ÄX si chiama **errore assoluto** si calcola in maniera differente a seconda della dinamica dell'esperimento.

- **<u>Caso1</u>:**

  Nel caso l'esperimento preveda una sola misurazione, o si usa uno strumento a bassa sensibilità che dà sempre lo stesso valore, si assume come $X_{miglior\text{-}stima}$ la misurazione effettuata, e come incertezza ÄX, la sensibilità dello strumento.

- **<u>Caso 2</u>**

  Caso invece in cui ripetendo la misura si ottengano valori diversi X_1, X_2, X_3, X_4, X_5,..., X_n che si discosteranno dal valor-vero chi per eccesso, chi per difetto. Con l'aumentare delle misurazioni intuitivamente si può pensare che vi siano delle compensazioni tra gli eccessi e i difetti, per cui sia ragionevole assumere come miglior stima ***del valor-vero*** della grandezza la media aritmetica delle misure:

$$X_{medio} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

e come incertezza $\Delta X = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}$

Errore relativo ed errore assoluto

Il valore ΔX considerato rappresenta **l'errore assoluto** e non è significativo della bontà delle misurazioni effettuate; sarà **l'errore relativo,** definito come $\frac{\Delta X}{X_{(miglior-stima)}}$ cioè il rapporto tra l'errore assoluto e il valore che assumiamo essere la miglior stima, che dà la bontà della misura.

Un esempio può essere di aiuto.

Esempio1:

supponiamo di aver fatto due misurazioni distinte con uno strumento molto sensibile di una stessa lunghezza e aver ottenuto i seguenti dati:

prima misurazione: (1,23 ±0,03) cm in tal caso

$X_{miglior\text{-}stima}$ = 1,23 cm

ΔX =0,03 cm

Errore relativo= $\dfrac{\Delta X}{X(miglior-stima)} = \dfrac{0,03}{1,23}$ = 0,024 in percentuale =2,4%

Seconda misurazione: (1,218±0,005) cm

$X_{miglior\text{-}stima}$ = 1,218 cm

ΔX =0,005 cm

Errore relativo= $\dfrac{\Delta X}{X(miglior-stima)} = \dfrac{0,005}{1,218}$ =0,0041 cm in percentuale =4,1 ‰

La seconda misurazione fornisce un risultato più preciso.

Propagazione dell'errore

Quando una grandezza fisica G viene valutata indirettamente, cioè il suo valore deriva dalla misurazione di A e di B, per esempio, G=A*B (***N.B.: potrebbe essere qualunque altra relazione matematica***) , si deve tener conto di come gli errori di misura delle singole grandezze A e B che la compongono , si riflettono sul valore di G.

La determinazione della velocità in un moto uniforme ne è un esempio: si misurano lo spazio percorso **s** e il tempo impiegato a percorrerlo **t** e si determina **v = s/t.**

In generale la relazione che esprime l'errore sulla grandezza calcolata viene detta legge di propagazione degli errori .

Legge di propagazione per somme e differenze

***Caso 1**: Somma di grandezze*

x, y, z, grandezze fisiche con z = x + y . Siano note le misure di x e y con i rispettivi errori Äx e Äy, l'errore assoluto della misura di z è pari alla somma degli errori assoluti delle misure di x e y:

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Dimostrazione:

$x \pm \Delta x \Longrightarrow x_{misurato} - \Delta x \le x_{vero} \le x_{misurato} + \Delta x$ cioè $x_{min} \le x_{vero} \le x_{max}$

$y \pm \Delta y \Longrightarrow y_{misurato} - \Delta y \le y_{vero} \le y_{misurato} + \Delta y$ cioè $y_{min} \le y_{vero} \le y_{max}$

Per la somma z = x + y si avrà:

$z_{min} = x_{min} + y_{min} = x_{misurato} - \Delta x + y_{misurato} - \Delta y = x_{misurato} + y_{misurato} - (\Delta x + \Delta y)$

$z_{max} = x_{max} + y_{max} = x_{misurato} + \Delta x + y_{misurato} + \Delta y = x_{misurato} + y_{misurato} + (\Delta x + \Delta y)$

da cui segue:

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y \, .$$

Analogamente si ha:

***Caso 2**: differenza di grandezze* **z = x – y**

$z_{min} = x_{min} - y_{max} = x_{misurato} - \Delta x - y_{misurato} - \Delta y = x_{misurato} - y_{misurato} - (\Delta x + \Delta y)$

$z_{max} = x_{max} - y_{min} = x_{misurato} + \Delta x - y_{misurato} + \Delta y = x_{misurato} - y_{misurato} + (\Delta x + \Delta y)$

da cui segue:

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

cioè ***per somme e differenze gli errori assoluti si sommano***.

Esempi numerici

x = 17 ± 1

y= 5 ± 1

z = x - y

determiniamo Δz conoscendo Δx e Δy

x = 17 ± 1 → 18 valore massimo; → 16 valore minimo

y = 5 ± 1 → 6 valore massimo; → 4 valore minimo

Quindi aiutandoci con lo schema possiamo ricavare:

il valore massimo assunto da (x - y) = 18 – 4 =14

in corrispondenza cioè del valore massimo di x meno quello minimo di y e ricavare anche

il valore minimo assunto da (x - y) = 16–6 =10

ottenuto dalla differenza tra il valore minimo di x e quello massimo di y

$$(x - y) \begin{cases} \nearrow 14 \text{ valore massimo} \\ \searrow 10 \text{ valore minimo} \end{cases}$$

(x - y) risulta compreso tra 10 e 14, che si può scrivere nella forma:

12 ± 2 che è equivalente a **(17- 5) ± 2** che corrisponde a :

(x - y) **±** $(\Delta x + \Delta y)$.

Esempio 2 :

Si vuole determinare la quantità di acqua contenuta in un recipiente con il metodo della doppia pesata.

Si pesa il recipiente vuoto (tara): ottenendo 0,150 Kg ± 0,005 Kg

Si pesa il recipiente con l'acqua: ottenendo 2,150 Kg ± 0,005 Kg

Per quanto dimostrato in precedenza, il dato cercato sarà

(2,150 - 0,150) Kg ± (0,005+ 0,005) Kg = 2,00 ± 0,01 Kg

<u>***Caso 3****: prodotto di grandezze* p = x·y</u>

Risulta conveniente scrivere: $x \pm \Delta x = x(1 \pm \frac{\Delta x}{x})$ e $y \pm \Delta y = (1 \pm \frac{\Delta y}{y})$

$$p_{min} = x_{min} \cdot y_{min} = xy\left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)\left(1 - \frac{\Delta y}{y}\right) = xy\left(1 - \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} + \cancel{\frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta y}{y}}\right) = xy\left(1 - \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)\right)$$

$$p_{max} = x_{max} \cdot y_{max} = xy\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = xy\left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \cancel{\frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta y}{y}}\right) = xy\left(1 + \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)\right)$$

da ciò segue che : $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$ da cui segue p= p$(1 \pm \frac{\Delta p}{p})$ = p $\pm$ Δp

Analogamente si ha:

Caso 4: <u>quoziente di grandezze</u> $q = \frac{x}{y}$

Per questo caso enunciamo solo la regola perché la dimostrazione risulta articolata.

$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$ da cui segue $q = q\left(1 \pm \frac{\Delta q}{q}\right) = q \pm \Delta q$

cioè ***per prodotti e quozienti gli errori relativi si sommano***.

Consideriamo alcuni casi particolari:

1. prodotto di una grandezza per un numero es. g = Bx

   $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{x} \Rightarrow \Delta g = g\frac{\Delta x}{x} = B\Delta x$

2. potenze es. f = x^N = x·x· … ·x N volte

   $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + ... + \frac{\Delta x}{x} = N \cdot \frac{\Delta x}{x}$

<u>Cifre significative</u>

Ogni qual volta si utilizza uno strumento di misura, i valori risultanti dalla misurazione diretta devono essere scritti in maniera coerente nel senso che deve essere chiaro qual è l'ultima cifra del numero che è affetta da errore.

In generale le cifre significative del risultato di una operazione di misurazione sono definite come **le cifre note con certezza più la prima cifra incerta.**

Il problema delle cifre significative mette in luce come certi aspetti della matematica e della la fisica si differenzino.

Supponiamo che **24 secondi** e **24,0 secondi** siano intervalli di tempo rilevati con un cronometro; in matematica, le due scritture hanno lo stesso significato, in fisica no. La prima è una misura effettuata con uno strumento in grado di apprezzare i soli secondi, la seconda misurazione con un cronometro in grado di apprezzare i decimi di secondo.

Questo semplice esempio mette in luce il fatto che Il numero di cifre presenti in una misurazione fornisce informazioni sulla sensibilità dello strumento utilizzato.
Un problema che si incontra nella trattazione dei dati in laboratorio è quello legato all'attribuzione delle cifre significative per misure di grandezze ottenute indirettamente.

Esempio:

calcolare la misura della velocità conoscendo le misure di spazio e di tempo:

misura spazio = (10,2 ± 0,1) m

misura tempo = (3,45 ± 0,01) s

Sapendo che $velocità = \frac{spazio}{tempo}$ per determinare la misura della velocità, è necessario prima di tutto calcolare il rapporto $\frac{10{,}2}{3{,}45}$.

La calcolatrice restituisce molte cifre decimali $\frac{10{,}2}{3{,}45}$ = 2,956521739 per sapere quali sono quelle che ha senso riportare nel risultato, è utile osservare l'errore relativo delle misure dello spazio e del tempo:

errore relativo della misura dello spazio è pari a $\frac{0{,}1}{10{,}2}$ ≅ 0,01 ≅1%

errore relativo della misura dello tempo è pari a $\frac{0{,}01}{3{,}45}$ ≅ 0,0029≅ 3 ‰.

l' errore relativo sulla velocità è pari alla somma degli errori relativi:

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t}$ = 0,01 + 0,0029 = 0,0129 ≅1,3% e quindi possiamo calcolare l'errore assoluto $\Delta V = V\frac{\Delta V}{V} \cong 0{,}04\frac{m}{s}$.

A questo punto l'approssimazione del rapporto $\frac{10{,}2}{3{,}45}$ a 2,96 sembra accettabile e scriveremo: V = 2,96 ± 0,04 $\frac{m}{s}$.

NOTA:

[1] Per conoscere la velocità di un veliero, il comandante faceva filare a poppa una sagola sulla quale erano presenti dei nodi distanziati fra loro di circa 1/120 di miglio (15.433 m). Alla estremità della sagola affondata, era fissata una tavoletta che fungeva da ancora galleggiante. Mentre il veliero avanzava, la sagola si svolgeva fuoribordo facendo sfilare un nodo dopo l'altro, quindi dopo 30 minuti di clessidra (30'') venivano contati quanti nodi erano passati approssimando in tal modo la velocità della nave.

Bibliografia: J. R. Taylor: Introduzione all'analisi degli errori - Zanichelli
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fondamenti di Fisica - C.E.A.
E. Ragazzino, M. Giordano, L. Milano: Fondamenti di Fisica - EdiSES, Napoli